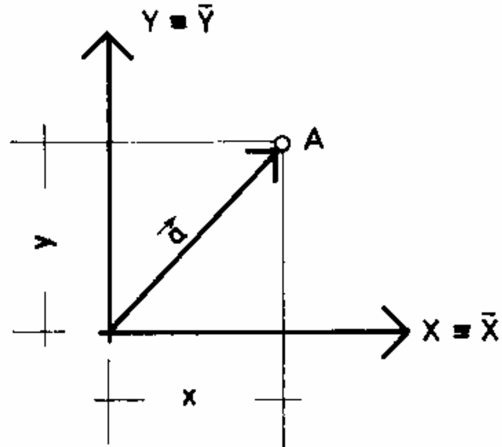
3. RAVANSKE TRANSFORMACIJE

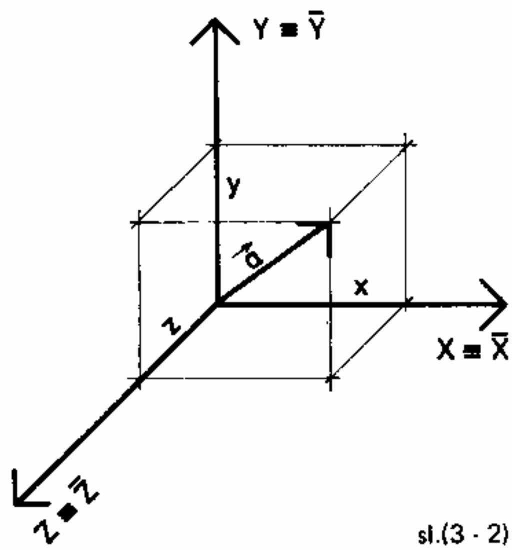
3.1. PREDSTAVLJANJE TAČKE

U 1. poglavlju smo videli da je svaka tačka definisana svojim koordinatama. Ako je tačka u ravni, onda je ona jednoznačno odredjena koordinatama x i y, gde su koordinate, u stvari, projekcije vektora položaja tačke.
Kratko napisano:

za tačku u ravni $\vec{a}$ (x, y) i
za tačku u prostoru $\vec{a}$ (x, y, z).



sl. (3 - 1)



sl.(3 - 2)

U matričnom obliku koordinate tačke se mogu pisati u obliku vektora reda : $[x\ y]$ za tačku u ravni i $[x\ y\ z]$ za tačku u prostoru, ili u obliku vektora kolone $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ za tačku u ravni ili $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ za tačku u prostoru.

Za matricu koordinata tačaka u daljem izlaganju koristićemo oblik vektora reda.

3.2. TRANSFORMACIJA KOORDINATE TAČAKA

Svaka tačka može da se transformiše u ravni odnosno u prostoru, množenjem matrice koordinata tačaka sa odgovarajućom matricom transformacije koju ćemo kratko obeležiti sa $\mathbf{T}$.

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A}\mathbf{T} \tag{3 - 1}$$

gde je:

$\bar{\mathbf{A}}$ matrica transformisanih koordinata

$\mathbf{A}$ matrica koordinata tačaka

$\mathbf{T}$ matrica transformacije

U praksi je najčešći slučaj da su matrice $\mathbf{A}$ i $\mathbf{T}$ poznate i da se traži matrica transformisanih koordinata $\bar{\mathbf{A}}$.

Jasno je da matrica transformisanih koordinata $\bar{\mathbf{A}}$ mora da bude istih dimenzija kao matrica koordinata $\mathbf{A}$. Iz poglavlja 2.2.4. je poznato da bi se matrica koordinata mogla množiti sa matricom transformacije, a da bi ujedno bio zadovoljen prethodni uslov, matrica transformacije mora da bude dimenzije 2×2.

Ako matricu transformacije prikažemo u opštem obliku sa

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \tag{3 - 2}$$

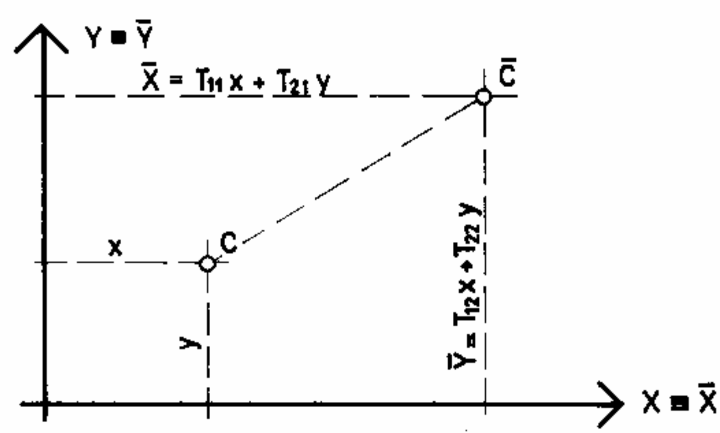
onda se matrica transformisanih koordinata **A** u ravni iz jednačine (3 -1) dobija:

$$\bar{A} = [\,\bar{X}\ \bar{Y}\,] = [X\ Y] \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} = [T_{11}X + T_{21}Y \quad T_{12}X + T_{22}Y\,]$$

odakle sledi da su transformisane koordinate

$$\bar{X} = T_{11}X + T_{21}Y \qquad (3 - 3)$$

$$\bar{Y} = T_{12}X + T_{22}Y \qquad (3 - 4)$$



sl. (3 - 3)

Za različite vrednosti elemenata matrice transformacije imamo i različite transformacije tačaka. Sve što je navedeno za transformaciju u ravni važi i za transformaciju tačke u prostoru, ali je u tom slučaju matrica transformacije **T** dimenzija 3 x 3.

3.3. LINIJE

Dve tačke definišu pravu. Pošto je tačka jednoznačno definisana svojim vektorom položaja, to znači da je prava definisana parom vektora položaja (pod uslovom da su ta dva vektora različita barem po modulu ili pravcu ili smeru, tj. da se tačke ne poklapaju).

Ako su date dve tačke u ravni, tačka A sa svojim koordinatama X_1, Y_1, i tačka B sa koordinatama X_2, Y_2, onda matrica koordinata ima oblik:

$$\begin{bmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{bmatrix}$$

Iz jednačine (3 - 1) sledi da su matrica transformisanih koordinata dobija kada se matrica koordinata pomnoži sa matricom transformacije T dimenzija 2 x 2.

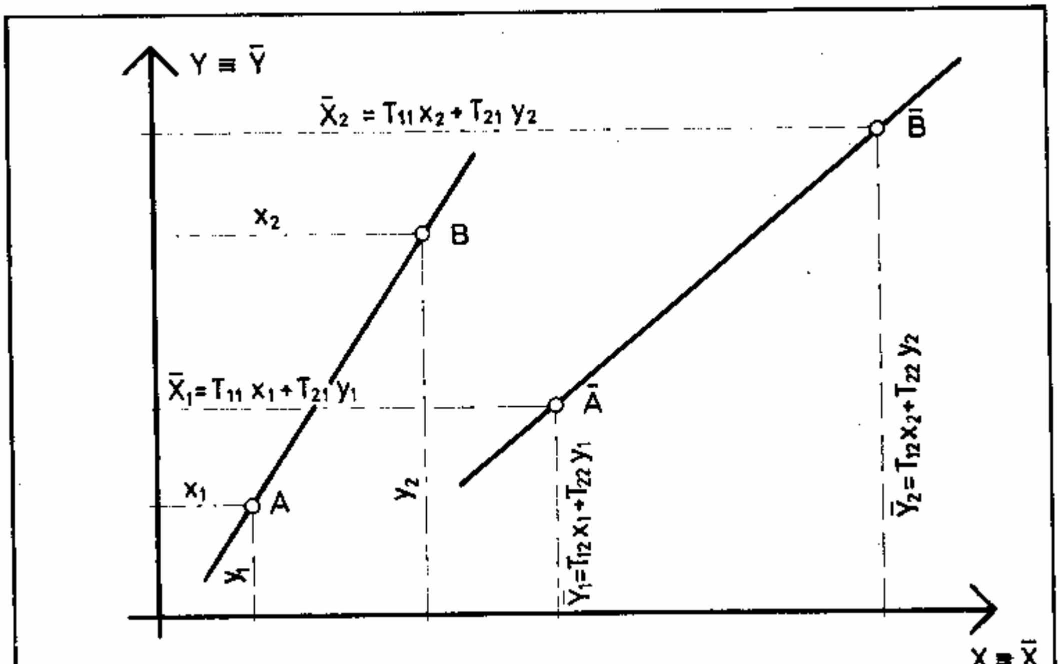
$$\begin{bmatrix} \bar{X}_1 & \bar{Y}_1 \\ \bar{X}_1 & \bar{Y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{X}_1 & \bar{Y}_1 \\ \bar{X}_2 & \bar{Y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11}\ X_1 + T_{21}\ Y_1 & T_{12}\ X_1 + T_{22}\ Y_1 \\ T_{11}\ X_2 + T_{21}\ Y_2 & T_{12}\ X_2 + T_{22}\ Y_2 \end{bmatrix}$$

Tačka A sa koordinatama X_1, Y_1 transformisala se u tačku $\bar{A}$ sa koordinatama $\bar{X}_1$, $\bar{Y}_1$, pri čemu je:

$$\bar{X}_1 = T_{11}\ X_1 + T_{21}\ Y_1$$

$$\bar{Y}_1 = T_{12}\ X_1 + T_{22}\ Y_1$$



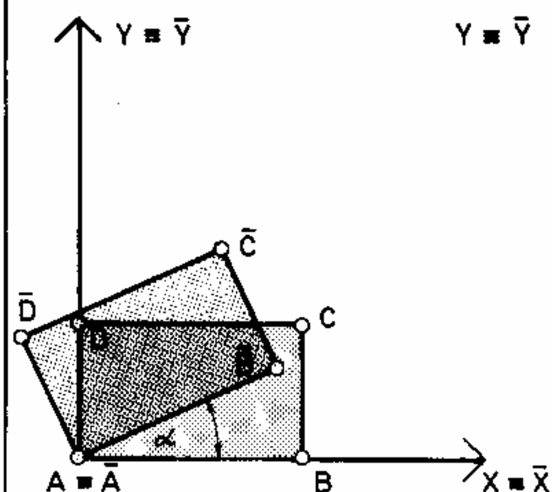
sl. (3 - 4)

Za različite vrednosti elemenata matrice transformacije dobijaju se i različite transformacije linije sl.(3 - 4). Elementi matrice mogu biti tako izabrani da se dobije transformisana linija koja je paralelna osnovnoj liniji, da se osnovna i transformisana linija seku i sl.

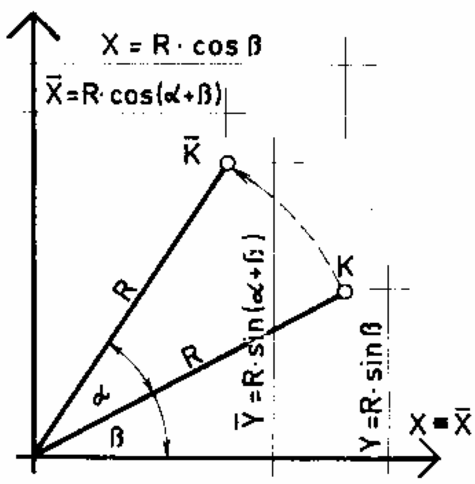
Za elemente matrice transformacije $T_{11} = T_{22} = 1$ i $T_{12} = T_{21} = 0$ matrica transformacije je jedinična matrica i dobija se $\bar{X}_1 = \bar{X}_1$, $\bar{Y}_1 = \bar{Y}_1$, $\bar{X}_2, = \bar{Y}_2$, $\bar{Y}_2 = Y_2$, tj. osnovna linija se poklapa sa transformisanom.

3.4. ROTACIJA

Posmatrajmo jedan pravougaonik u ravni definisan tačkama A,B,C i D i svojim odgovarajućim koordinatama sl. (3 - 5). Kao što se iz slike vidi, koordinate tačaka A,B,C i D, su se transformisale u tačke $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$ i $\bar{D}$ rotiranjem pravougaonika oko tačke A za ugao α . Dakle, trebalo bi da se odrede elementi matrice transformacije, i to takvi elementi da daju rotaciju pravougaonika za ugao α .



sl (3 - 5)



sl (3 - 6)

Posmatrajmo neku tačku K u ravni koja se transformiše u tačku $\bar{K}$ sl. (3 - 6)

$$\bar{X} = R\cos(\alpha + \beta)$$

$$\bar{X} = R(\cos\alpha \times \cos\beta - \sin\alpha \times \sin\beta)$$

$$\bar{X} = X\cos\alpha - Y\sin\alpha \qquad (3 - 5)$$

$$\bar{Y} = R\sin(\alpha + \beta)$$

$$\bar{Y} = R(\sin\alpha \times \cos\beta + \cos\alpha \times \sin\beta) \qquad (3 - 6)$$

$$\bar{Y} = X\sin\alpha + \cos\alpha$$

$$T_{11} = \cos\alpha, \quad T_{12} = \sin\alpha, \quad T_{21} = -\sin\alpha, \quad T_{22} = \cos\alpha$$

Jednačinu (3 - 1) u matričnom obliku možemo napisati:

$$\bar{A} = [\,\bar{X}\ \bar{Y}\,] = [\,X\ Y\,]\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \qquad (3 - 7)$$

gde je matrica

$$\begin{bmatrix} \cos a & \sin a \\ -\sin a & \cos a \end{bmatrix} \qquad (3-8)$$

matrica transformacije.

3.6. HOMOGENE KOORDINATE

U dosadašnjem izlaganju nismo mogli da u matrici transformacije uvedemo konstante translacije jer to nije dozvoljavao format matrice koordinata tačaka. Da bi se mogle uvesti ove konstante moraju se povećati dimenzije matrice koordinata na 3 x 1, za tačku u ravni, pa će matrice $\mathbf{A}$ i $\bar{\mathbf{A}}$ imati oblik

$$\mathbf{A} = [\,X \;\; Y \;\; 1\,] \quad ; \quad \bar{\mathbf{A}} = [\,\bar{X} \;\; \bar{Y} \;\; 1\,] \qquad (3-9)$$

Najmanji format matrice transformacije T koji bi se mogao pomnožiti sa matricom A je 3 x 2 i ima oblik:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \\ T_{31} & T_{32} \end{bmatrix} \qquad (3-10)$$

Ovakav pravougaoni oblik matrice transformacije nije pogodan jer matrica nije kvadratna i ne može se dobiti inverzija matrice $\mathbf{T}$. Zato se matrica transformacije proširuje na format 3 x 3

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \qquad (3-11)$$

Množenjem matrice $\mathbf{A}$ i $\mathbf{T}$ dobija se matrica transformacionih koordinata $\bar{\mathbf{A}}$ formata 3 x 1, koja ima oblik za tačku u ravni

$\bar{A} = [\bar{X}\ \bar{Y}\ 1]$

$$[X\ \ Y\ \ 1]\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} = [X'\ Y'\ V'] = [\frac{X'}{V}\ \frac{Y'}{V}\ 1] = [\bar{X}\ \bar{Y}\ 1]$$

Na ovakav način trodimenzionalnim vektorom je predstavljen dvodimenzionalni vektor položaja. Analogno ovome, četvorodimenzionalnim vektorom predstavljamo trodiemnzionalni vektor položaja.

$$[X\ Y\ Z\ 1] \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & T_{14} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & T_{24} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & T_{34} \\ T_{41} & T_{42} & T_{43} & T_{44} \end{bmatrix} = [X'\,Y'\,Z'\,V] = [\bar{X}\,\bar{Y}\,\bar{Z}\,1]$$

3. 7. MATRICE TRANSFORMACIJE ZA LIKOVE U RAVNI

Posmatrajmo matricu transformacije za likove u ravni **T**

$$\mathbf{T} = \left[\begin{array}{cc:c} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ \hdashline T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{array}\right] \qquad (3 \cdot 12)$$

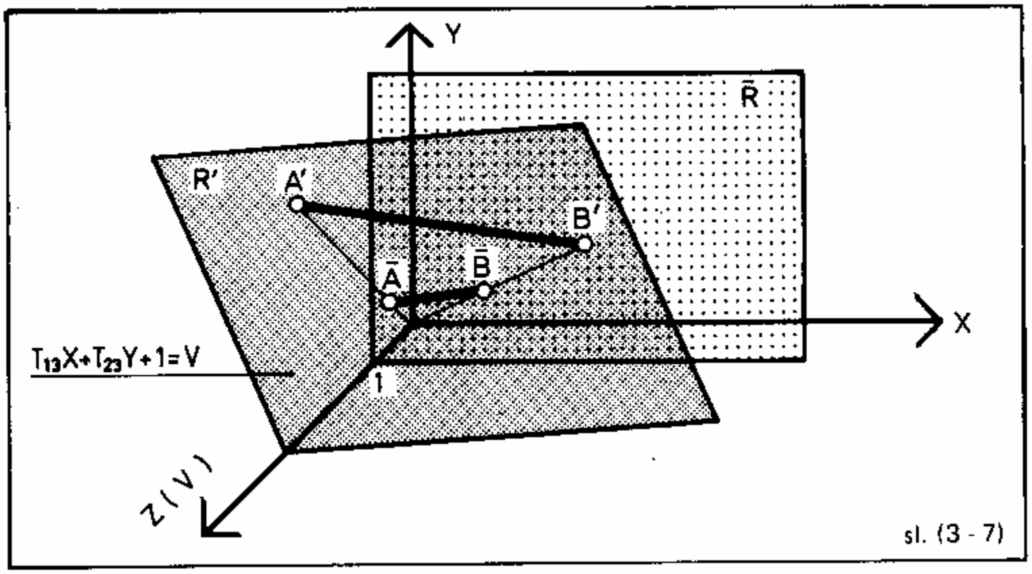
Treba uočiti grupe elemenata matrice transformacije koje su razdvojene isprekidanom linijom. U ranijem izlaganju se videlo da sa članovima T_{11}, T_{12}, T_{21} i T_{22} može dobiti rotacija deformacije lika, uvećanje, odnosno smanjenje lika u X ili Y pravcu. Članovima T_{31} T_{32} dobijaju se translacije u X i Y pravcu. Član T_{33} daje generalno uvećanje, odnosno smanjenje lika u ravni. Da bismo objasnili značenje elemenata T_{13} i T_{23} treba posmatrati transformaciju tačaka koje se dobijaju sledećom transformacijom:

$$[X'\,Y'\,V] = [X\;Y\;1]\begin{bmatrix}1 & 0 & T_{13}\\ 0 & 1 & T_{23}\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} = [\,X\;Y\;(T_{13}X+T_{23}Y+1)\,]$$

$$[\bar{X}\;\bar{Y}\;1] = \left[\;\frac{X}{T_{13}X+T_{23}Y+1}\quad \frac{Y}{T_{13}X+T_{23}Y+1}\quad 1\;\right] \tag{3 - 13}$$

$$V = T_{13}X + T_{13}Y + 1 \tag{3 - 14}$$

Jednačina (3 - 14) predstavlja jednačinu ravni u prostoru gde je V treća koordinata sl. (3 - 7)



sl. (3 - 7)

3. 8. TRANSLACIJA U RAVNI

Elementi matrice transformacije koji definišu translaciju su T_{31} i T_{32} pa matrica transformacije ima oblik

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ T_{31} & T_{32} & 1 \end{bmatrix} \tag{3 - 14}$$

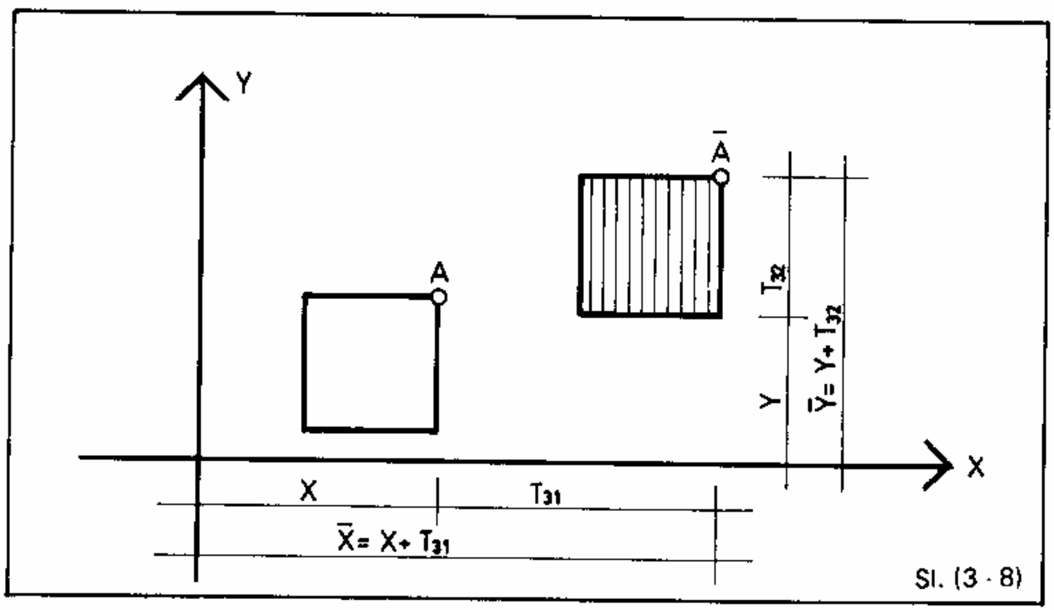
Ako matricu koordinata pomnožimo sa ovakvom matricom transformacije, dobićemo:

$$[\,X \;\; Y \;\; 1\,] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ T_{31} & T_{32} & 1 \end{bmatrix} = [\,X + T_{31} \quad Y + T_{32} \quad 1\,] = [\,\bar{X} \;\; \bar{Y} \;\; 1\,]$$

$$\bar{X} = X + T_{31} \tag{3 - 15}$$

$$\bar{Y} = Y + T_{32} \tag{3 - 16}$$

Iz jednačine (3 - 15) i (3 - 16) i sl. (3 - 8) se vidi da element T_{31} daje transformaciju u X - pravcu, a T_{32} transformaciju u Y - pravcu.



Sl. (3 - 8)

3. 9. ROTACIJA

Koristeći jednačine (3 - 5) i (3 - 6) dobijamo matricu transformacije za rotaciju u ravni

$$T = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3 - 17}$$

Da bi se neki lik u ravni rotirao za ugao α potrebno je taj lik prethodno translirati u koordinatni početak. Potom ga na tom mestu rotirati i napokon ponovo translirati u njegov originalan položaj Sl. (3 - 9). U matričnom obliku to se može prikazati sa:

$$A \times T_{T1} \times T_R \times T_{T2} = \bar{A} \tag{3 - 18}$$

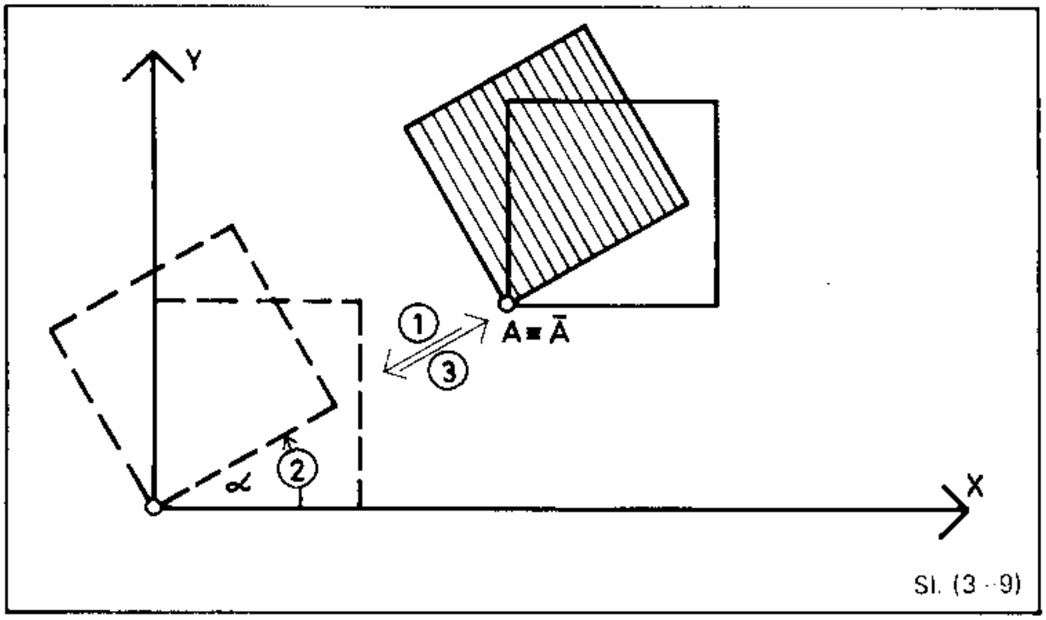
ili u razvijenom obliku

$$[X\ Y\ 1]\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -T_{31} & -T_{32} & 1 \end{bmatrix}}_{\substack{\text{Translacija} \\ \text{u koord.} \\ \text{početak} \\ T_{T1}}}\underbrace{\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & -\cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\substack{\text{Rotacija} \\ T_R}}\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ T_{31} & T_{32} & 1 \end{bmatrix}}_{\substack{\text{Translacija u} \\ \text{definitivni} \\ \text{položaj} \\ T_{T2}}} = [\bar{X}\ \bar{Y}\ 1]$$

Kada se matrice T_{T1}, T_R, i T_{T2} pomnože dobija se konačna matrica transformacije

$$T = T_{T1} \times T_R \times T_{T2} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 1 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & \\ -T_{31}(\cos\alpha - 1) + T_{32}\sin\alpha & -T_{31}\sin\alpha - T_{32}(\cos\alpha - 1) & 1 \end{bmatrix}$$

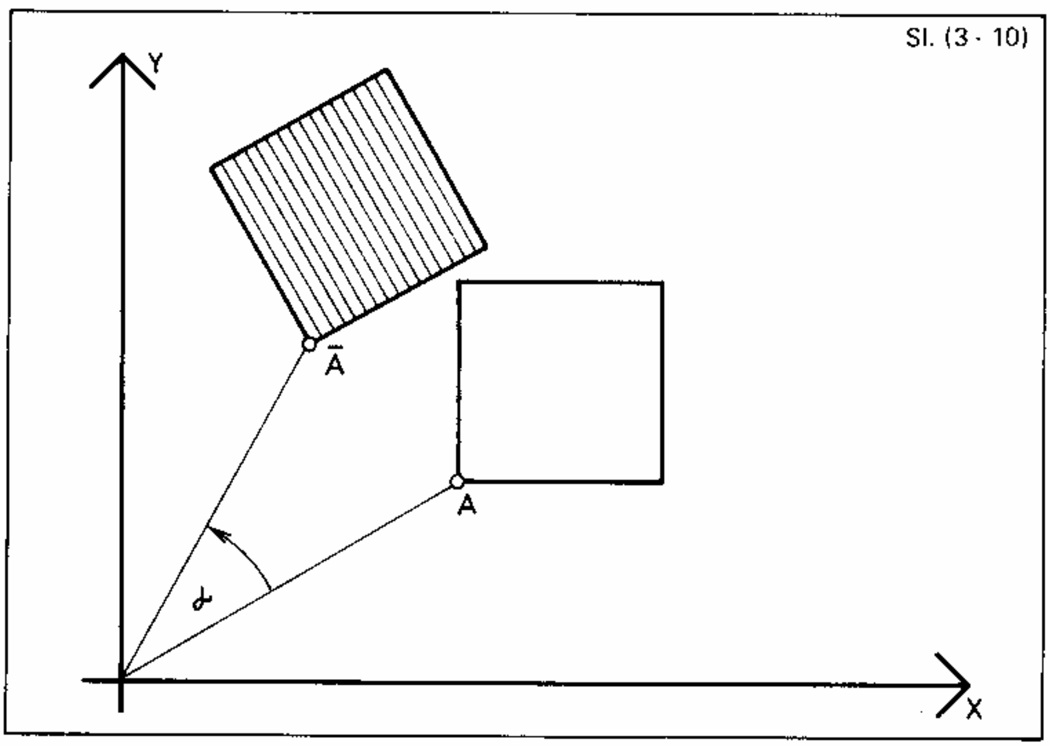
(3 - 19)



Sl. (3 - 9)

Iz sl. (3 - 10) jasno se vidi šta bi se desilo sa likom da nije transliran u koordinatni početak pre nego što je rotiran za ugao α.

Sl. (3 - 10)



3.10. UVEĆANJE – SMANJENJE

Matrica transformacije koja daje uvećanje odnosno smanjenje ima oblik:

$$T = \begin{bmatrix} T_{11} & 0 & 0 \\ 0 & T_{22} & 0 \\ 0 & 0 & T_{33} \end{bmatrix} \tag{3 - 20}$$

Ako je element matrice transformacije $T_{33} = 1$, matrica T ima sledeći oblik:

$$T = \begin{bmatrix} T_{11} & 0 & 0 \\ 0 & T_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3 - 21}$$

Prema položaju koji zauzimaju u matrici transformacije elementi T_{11} i T_{22} daju uvećanje odnosno smanjenje u X i Y pravcu.

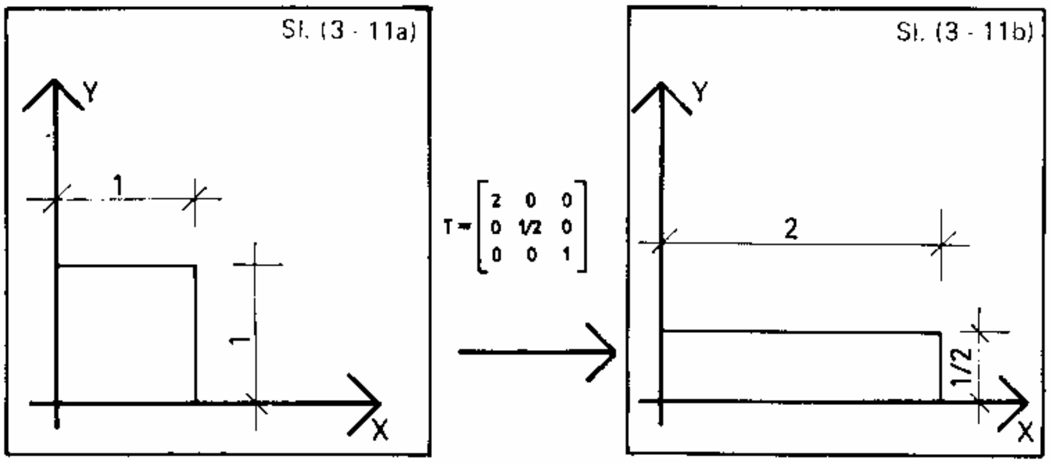
Element T_{33}, kao što je rečeno u poglavlju 3.7, daje generalno uvećanje, odnosno smanjenje. Posmatrajmo matricu transformacije koja daje generalno uvećanje, odnosno smanjenje:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & T_{33} \end{bmatrix} \tag{3 - 22}$$

Ako matricu koordinata tačaka pomnožimo sa ovakvom matricom transformacije, dobićemo:

$$[\,X \;\; Y \;\; 1\,] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & T_{33} \end{bmatrix} = [\,X' \;\; Y' \;\; T_{33}\,] = \begin{bmatrix} \dfrac{X'}{T_{33}} & \dfrac{Y'}{T_{33}} & 1 \end{bmatrix} = [\,\bar{X} \;\; \bar{Y} \;\; 1\,] \tag{3 - 23}$$

Iz jednačine (3 - 23) je lako uočiti da se smanjenje lika dobija ako je $T_{33} > 1$, odnosno uvećanje ako je $T_{33} < 1$.



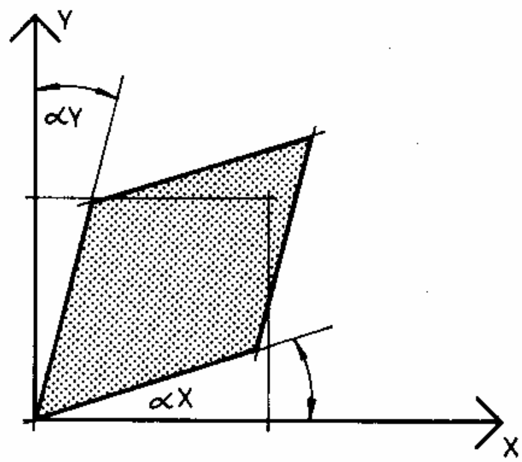
Sl. (3 - 11a) Sl. (3 - 11b)

3.11. DEFORMACIJA LIKA U RAVNI

Pod pojmom deformacije lika ovde podrazumevamo deformaciju koja deformiše lik tako da sve strane koje su bile paralelne u originalnom obliku ostaju paralelne i prilikom deformacije Sl. (3 - 12). Matrica transformacije za deformaciju lika u ravni ima oblik:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & tg\alpha x & 0 \\ tg\alpha y & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (3 - 24)$$

Uglovi $tg\alpha x$ i $tg\alpha y$ su nagibi za X i Y pravac.



Sl. (3 - 12)